ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—————————o0o—————————

TRẦN HỌC TOÀN

XẤP XỈ NGHIỆM CỦA MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

TRẦN HỌC TOÀN

XẤP XỈ NGHIỆM CỦA MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, 10/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\forall x$	với mọi x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$C[a,b]$	không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$
$l^p,\ 1 \le p < \infty$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
$L^p[a,b],\ 1 \le p < \infty$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian vô hạn chiều được nhà toán học người Italia là G. Stampacchia và các đồng sự đưa ra lần đầu tiên vào những năm đầu của thập niên 60 thế kỉ XX trong khi nghiên cứu về bài toán biên tự do (xem [7], [9], [10] và [11]). Bài toán bất đẳng thức biến phân có vai trò quan trọng trong nghiên cứu toán học lý thuyết về bài toán tối ưu, bài toán điều khiển, bài toán cân bằng, bài toán bù, bài toán giá trị biên v.v... Bên cạnh đó, bài toán bất đẳng thức biến phân còn có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế như mô hình cân bằng trong kinh tế, giao thông, bài toán khôi phục tín hiệu, bài toán công nghệ lọc không gian, bài toán phân phối băng thông v.v... Do đó, việc nghiên cứu các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân đang là một trong những đề tài thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước và nhiều kết quả sâu sắc đã được thiết lập.

Đề tài luận văn giới thiệu và trình bày lại hai phương pháp lặp hiện giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong trong không gian Banach trong bài báo [6] công bố năm 2017.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều, không gian Hilbert và không gian Banach, trình bày mối liên hệ giữa bài toán bất đẳng thức biến phân với một số bài toán liên quan. Chương 2 trình bày hai phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach, trình bày sự hội tụ mạnh của các phương pháp và đưa ra ví

dụ minh họa.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong khoa Toán–Tin và các thầy cô trong trường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Trung tâm GDNN – GDTX Đan Phượng và các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học.

Xin cảm ơn các anh chị học viên lớp Cao học Toán K10 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Tác giả luận văn

Trần Học Toàn

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân và một số bài toán liên quan

Chương này giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều và vô hạn chiều cùng một số bài toán liên quan đến bất đẳng thức biến phân. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2], [3], [5] và [8].

1.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều

1.1.1 Điểm bất động và phép chiếu mêtric

Ký hiệu $\mathbb{R}^N$ là không gian Euclid N chiều có tích vô hướng và chuẩn tương ứng ký hiệu là $\langle .,. \rangle$ và $\|.\|$.

Định nghĩa 1.1.1 Cho C là một tập hợp khác rỗng, F là một ánh xạ từ C vào C. Một điểm $x \in C$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ F nếu $F(x) = x$.

Tập tất cả các điểm bất động của F được ký hiệu là $\mathrm{Fix}(F)$, nghĩa là

$$\mathrm{Fix}(F) = \big\{x \in C : F(x) = x\big\}.$$

Nhận xét 1.1.2 Điểm bất động của ánh xạ F là nghiệm của phương trình toán tử $F(x) - x = 0$.

Định nghĩa 1.1.3 Cho X là một không gian mêtric với khoảng cách d. Ánh xạ $F : X \to X$ được gọi là một ánh xạ co nếu

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) \quad x, y \in X, \tag{1.1}$$

ở đây θ là hằng số thỏa mãn $0 \leq \theta < 1$.
Nếu $\theta = 1$, F được gọi là ánh xạ không giãn.

Ví dụ 1.1.4 (a) Ánh xạ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $F(x) = \dfrac{1}{2}x$ (hoặc $F(x) = \cos x$) là ánh xạ co (tương ứng, là ánh xạ không giãn).

(b) Ánh xạ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $F(x) = \dfrac{1}{3}Ax$ (hoặc $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}Ax$) với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ là ánh xạ co (tương ứng, là ánh xạ không giãn).

Định lý 1.1.5 (Nguyên lý ánh xạ co Banach) (xem [2]) *Nếu X là không gian mêtric đầy đủ và nếu $F : X \to X$ là ánh xạ co, thì tồn tại duy nhất một điểm bất động của ánh xạ F.*

Nhận xét 1.1.6 (a) Định lý 1.1.5 nói chung không đúng khi F là ánh xạ không giãn. Chẳng hạn $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ xác định bởi $F(x) = x$, là ánh xạ không giãn và $\mathrm{Fix}(F) = \mathbb{R}^N$.

(b) Điều kiện ánh xạ co chỉ là điều kiện cần, chẳng hạn $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $F(x) = \sin x$ là ánh xạ không giãn và F có duy nhất điểm bất động $\mathrm{Fix}(F) = \{0\}$.

Định lý 1.1.7 (Định lý điểm bất động Brouwer) (xem [3]) *Nếu F là ánh xạ liên tục từ hình cầu đóng $B \subset \mathbb{R}^N$ vào chính nó thì F có ít nhất một điểm bất động.*

Chú ý 1.1.8 (a) Nếu F không liên tục thì F vẫn có thể có điểm bất động. Chẳng hạn $F : [0, 1] \to [0, 1]$ xác định bởi $F(x) = 0$ nếu $-1 \leq x < 1$ và $F(x) = 1$ nếu $x = 1$ là ánh xạ không liên tục trên $[0, 1]$ và $\mathrm{Fix}(F) = \{0, 1\}$.

(b) Trong Định lý 1.1.7 ta có thể thay hình cầu đóng B bởi một tập con lồi compact của $\mathbb{R}^N$.

Sau đây ta nhắc lại một số khái niệm về tập lồi và hàm lồi.
Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^N$. Tập tất cả các điểm $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ gọi là đoạn thẳng (đóng) nối a và b, và được ký hiệu là $[a, b]$.

Định nghĩa 1.1.9 Tập $C \subseteq \mathbb{R}^N$ được gọi là tập hợp lồi nếu với mọi $x, y \in C$ và với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Nói cách khác, tập $C \subseteq \mathbb{R}^N$ là tập lồi nếu nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì thuộc nó.

Ví dụ 1.1.10 Trong không gian $\mathbb{R}^N$, các tập hợp sau đây là các tập lồi:

(a) hình cầu đóng tâm x_0 bán kính r: $B(x_0, r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| \leq r\}$;

(b) nửa không gian đóng $H_\alpha = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \langle a, x\rangle \leq \alpha\}$;

(c) hình đa diện $\Delta = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \langle A, x\rangle \leq b\}$,

trong đó $x_0 \in \mathbb{R}^N$, r là số thực dương, $a \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$, A là ma trận thực cỡ $M \times N$, $b \in \mathbb{R}^M$.

Định nghĩa 1.1.11 Cho C là tập con của không gian $\mathbb{R}^N$, $f : C \to [-\infty, +\infty]$ là hàm tùy ý.

(a) Miền hữu hiệu của hàm f, ký hiệu và định nghĩa bởi:

$$\mathrm{dom} f = \Big\{x \in C : f(x) < +\infty\Big\}. \tag{1.2}$$

(b) Tập trên đồ thị của hàm f ký hiệu và định nghĩa bởi:

$$\mathrm{epi} f := \Big\{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\Big\} \tag{1.3}$$

(c) Nếu $\mathrm{dom} f$ khác rỗng và $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in C$ thì ta nói rằng hàm f là chính thường.